SIMULAZIONE ZANICHELLI 2023

DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

Si risolva uno dei due problemi e si risponda a 4 quesiti.

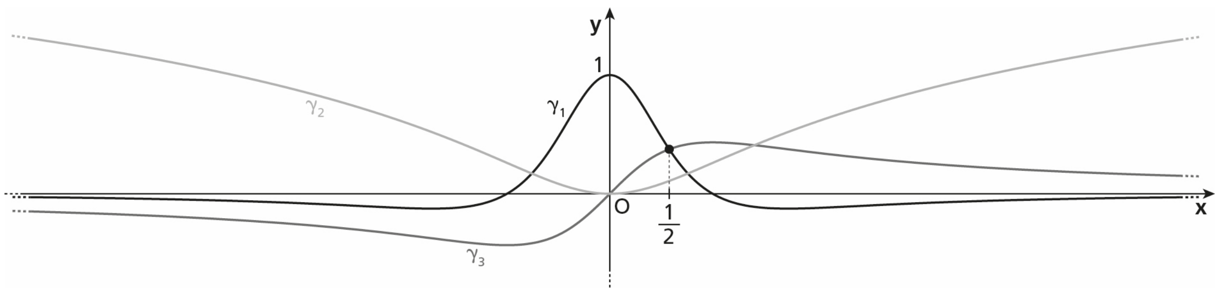
Problema 1

Considera la funzione $f(x) = \frac{ax}{4x^2+b}$, con a e b parametri reali non nulli. Siano inoltre

$$g(x) = f'(x), \qquad h(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

rispettivamente la funzione derivata prima e la funzione integrale relativa a $f(x)$.

Nella figura sono rappresentati i grafici delle tre funzioni in uno stesso riferimento cartesiano Oxy.



1. Associa ciascuna funzione al rispettivo grafico esplicitando dettagliatamente le motivazioni. Usa i dati in figura per determinare i valori delle costanti a e b.

2. Nel punto **1** hai verificato che $a = 3$ e $b = 3$. Considera le funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ per questi valori dei parametri a e b. Ricava esplicitamente le espressioni delle funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$. Determina i punti di massimo e minimo relativi delle tre funzioni. Inoltre, trova i punti di flesso delle funzioni $f(x)$ e $h(x)$.

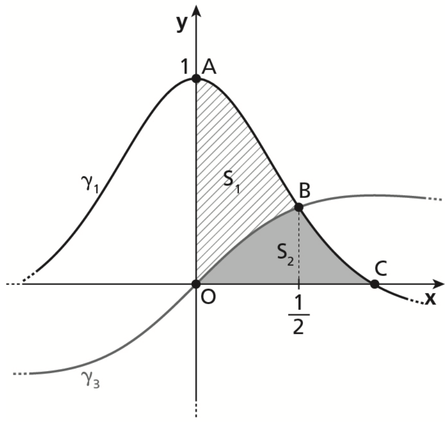
3. Calcola i limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^2}, \lim_{x\to +\infty}\frac{h(x)}{\ln x}.$$

Hanno collaborato Francesco Benvenuti, Andrea Betti, Valentina Folloni, Lorenzo Meneghini.

4. Detti A e C i punti di intersezione della curva γ_1 con l'asse y e con l'asse x, rispettivamente, e B il punto di intersezione delle curve γ_1 e γ_3, siano S_1 la regione piana OAB e S_2 la regione piana OBC rappresentate in figura.

Calcola il rapporto fra l'area di S_1 e quella di S_2. Esplicita le eventuali considerazioni teoriche relative alle funzioni coinvolte che permettono di semplificare il calcolo.



Problema 2

La cinciallegra è un piccolo uccello dalla caratteristica colorazione giallo-verde molto diffuso in Europa e nel Nord Africa. Le cinciallegre vivono in stormi numerosi, adattandosi alle diverse tipologie di habitat. L'andamento della popolazione di uno stormo isolato di cinciallegre può essere descritto da un modello malthusiano

$$N(t) = N(t_0)e^{\left(k-\frac{1}{2}\right)(t-t_0)}, \qquad \text{per } t \geq t_0,$$

dove t_0 indica l'istante iniziale dell'osservazione e t il generico istante di tempo, entrambi espressi in mesi, e $N(t)$ è il numero di esemplari dello stormo all'istante t. La costante k rappresenta il tasso di natalità in un'annata riproduttiva, mentre la costante $\frac{1}{2}$ è il tasso di mortalità intrinseco della specie.

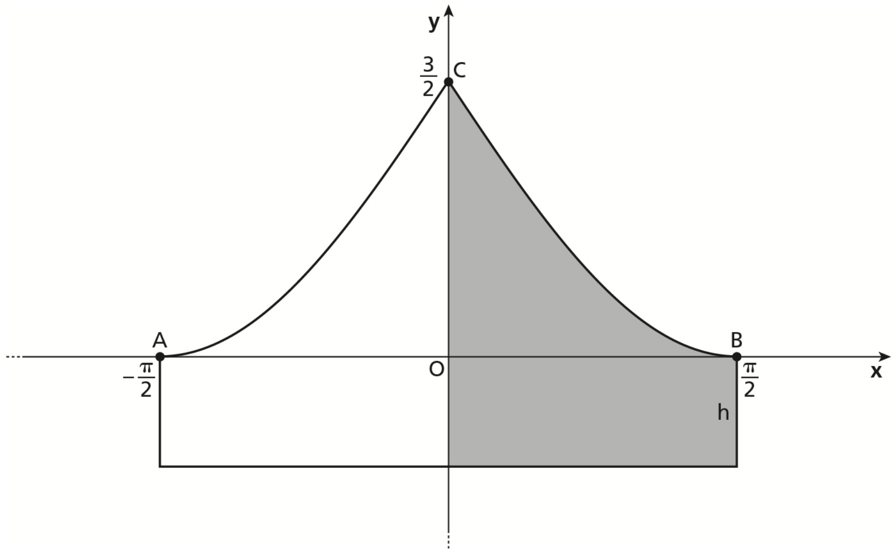
Un ornitologo sta studiando l'andamento di una popolazione isolata di cinciallegre e nota che la metà degli esemplari del gruppo sono femmine. Ogni femmina depone in media 10 uova nella stagione riproduttiva. L'84% delle uova deposte si schiude e di questi pulcini solo il 71% raggiunge i tre mesi d'età. Purtroppo, solo il 10% dei giovani esemplari sopravvive alla stagione invernale.

1. Usa le informazioni ricavate dall'ornitologo per calcolare la costante k.

2. Dopo aver verificato che $k = 0{,}2982$, scrivi l'espressione analitica della funzione $N(t)$, sapendo che l'ornitologo all'istante $t_0 = 0$ mesi conta 50 esemplari adulti nello stormo in esame. Studia e rappresenta graficamente la funzione $N(t)$.
Dimostra che lo stormo di cinciallegre in esame è destinato all'estinzione in assenza di nuovi inserimenti o migrazioni.
Calcola il tempo necessario affinché il gruppo si dimezzi e determina, in tale istante, il valore della velocità di variazione del numero di esemplari.

Hanno collaborato Francesco Benvenuti, Andrea Betti, Valentina Folloni, Lorenzo Meneghini.

Per proteggere dai predatori le nidiate, l'ornitologo progetta delle casette in legno da distribuire sugli alberi. Ogni casetta è costituita da un cilindro di altezza h, coperto da un tetto impermeabilizzato, e ha il profilo mostrato in figura, in cui le misure sono riportate in decimetri.



3. Individua quale delle seguenti funzioni descrive il profilo del tetto e determina il valore del parametro a, affinché la funzione soddisfi le condizioni deducibili dal grafico:

$$y = a\cos x, \quad y = a(1 - |x|), \quad y = a(1 - \sin|x|).$$

4. Per agevolare lo scolo dell'acqua piovana il culmine del tetto deve presentare un angolo acuto.
Dopo aver verificato che la funzione al punto **3** che ben rappresenta il profilo del tetto è $y = \frac{3}{2}(1 - \sin|x|)$, per $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, dimostra che tale profilo soddisfa anche la richiesta relativa all'angolo al culmine del tetto.

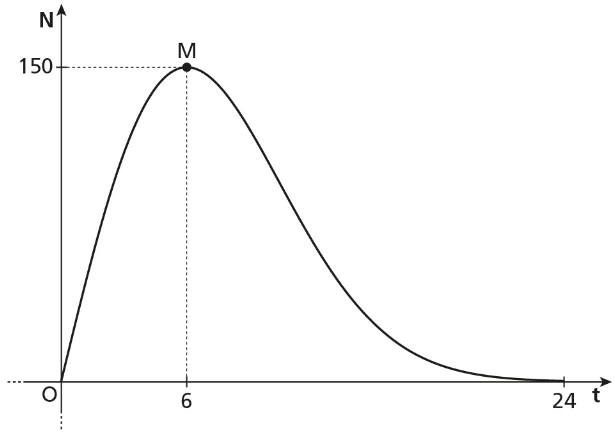
5. Determina per quale valore dell'altezza h del cilindro che si trova al di sotto del tetto della casetta, il rapporto tra l'area della sezione del tetto e l'area della sezione del cilindro è $\frac{\pi-2}{\pi}$.

QUESITI

1. Determina l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che $f''(x) = 2 - \frac{20}{x^3}$ e che la retta di equazione $y = 16x - 16$ è tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel suo punto $P(1; 0)$. Trova gli eventuali asintoti della funzione $y = f(x)$.

Hanno collaborato Francesco Benvenuti, Andrea Betti, Valentina Folloni, Lorenzo Meneghini.

2. Un negozio di abbigliamento ha aperto un nuovo sito di *ecommerce*. L'andamento del numero di accessi alla home page del sito nel giorno di lancio della piattaforma di *ecommerce* è modellizzato dal grafico in figura. Il tempo t è espresso in ore, mentre il numero N in migliaia di accessi.

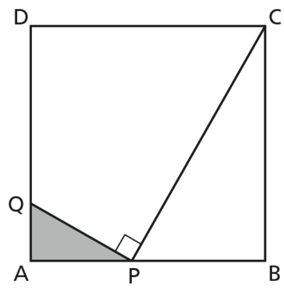


Determina per quali valori dei parametri reali e positivi a e b, la funzione

$$N(t) = at\,e^{-bt^2}, \qquad \text{con } t \in [0; 24],$$

ha l'andamento in figura. Stima il numero di accessi dopo 24 ore da quando il sito è stato lanciato.

3. Considera un quadrato $ABCD$ di lato 1. Sia P un punto del lato AB e sia Q l'intersezione tra il lato AD e la perpendicolare in P al segmento PC.



Determina $x = \overline{AP}$ in modo che l'area S del triangolo APQ sia massima e ricava S_{max}.

Determina $x = \overline{AP}$ in modo che il volume V del cono ottenuto per rotazione del triangolo APQ intorno al cateto AP sia massimo e ricava V_{max}.

4. Considera le funzioni

$$f(x) = ax(5-2x), \qquad g(x) = x^2\left(\frac{5}{2} - ax\right), \qquad \text{con } a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Determina per quale valore di a si ha $f(2) = g(2)$. Verifica che per questo valore di a i grafici delle due funzioni hanno tre punti in comune.

Considerando il valore di a determinato in precedenza, stabilisci se nell'intervallo $[0; 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange alle due funzioni. In caso affermativo, determina per entrambe le funzioni i valori $c \in]0; 2[$ per cui è verificata la tesi.

Stabilisci, inoltre, se nell'intervallo $[0; 2]$ siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy per la coppia di funzioni $f(x)$ e $g(x)$. In caso affermativo, trova i valori $x \in]0; 2[$ per cui è verificata la tesi.

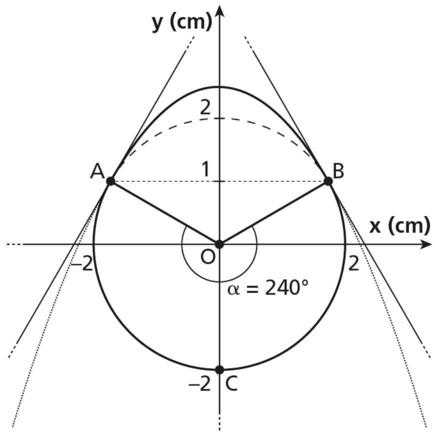
Hanno collaborato Francesco Benvenuti, Andrea Betti, Valentina Folloni, Lorenzo Meneghini.

5. Nel sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$ la retta r è definita dal seguente sistema di equazioni parametriche

$$r:\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases}.$$

Determina il punto P che appartiene alla retta r e che si trova alla distanza minima dall'origine del sistema di riferimento. Ricava l'equazione del piano α passante per P e perpendicolare a r.

6. Una gioielliera realizza un medaglione d'argento il cui profilo, rappresentato in figura, è delimitato dall'arco ACB della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ e dall'arco di parabola AB.



Determina l'equazione della parabola sapendo che è tangente alla circonferenza nei punti A e B di ordinata 1 e scrivi le equazioni delle rette tangenti alle curve nei due punti comuni. Stima la massa del medaglione, sapendo che il suo spessore uniforme è di $2{,}0$ mm e che la densità dell'argento è $\rho_{Ag} = 10{,}49$ g/cm^3.

7. Il grafico della funzione $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ divide il quadrato Q di vertici $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ e $(0;1)$ in due regioni R_1 e R_2, con $\mathrm{Area}(R_1) > \mathrm{Area}(R_2)$. Scelti a caso, uno dopo l'altro, tre punti interni al quadrato Q calcola la probabilità che solo l'ultimo punto appartenga alla regione R_1.

8. Determina per quali valori dei parametri a e b il grafico della funzione

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

presenta nel suo punto d'intersezione con l'asse y una retta tangente parallela alla retta di equazione $3x + 2y + 1 = 0$ e la funzione $f(x)$ è tale che $f''(x)$ è uguale a $f(x) + e^{-x}$.

Hanno collaborato Francesco Benvenuti, Andrea Betti, Valentina Folloni, Lorenzo Meneghini.